3.3.13 Konstrukce na základě výpočtu III

Předpoklady: 030312

Př. 1: Je dán obdélník o stranách *a*, *b*. Sestroj čtverec o stejném obsahu.

Řešení předchozích příkladů vycházelo ze vzorců $\Rightarrow$ popíšeme si zadání vzorcem.
Obsah obdélníku: $S = ab$, obsah čtverce $S = x^2$ $\Rightarrow$ hledáme délku úsečky *x*, tak aby platilo $x^2 = ab$, kde *a*, *b* jsou úsečky známých délek.

Zkusíme upravit na rovnost poměrů: $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$ $\Rightarrow$ nejde řešit pomocí podobnosti, protože v obou trojúhelnících, které bychom rýsovali, by se vyskytovala úsečka o neznámé délce *x* $\Rightarrow$ musíme najít jiný vzorec.

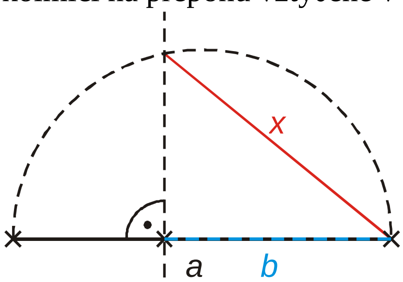
Vzorec $x^2 = ab$ připomíná:

- Euklidovu větu o odvěsně: $a^2 = c \cdot c_a$ ($b^2 = c \cdot c_b$),
- Euklidovu větu o výšce: $v^2 = c_a \cdot c_b$.

Volíme: $a = 5\text{cm}$, $b = 3\text{cm}$.

Řešení pomocí Euklidovy věty o odvěsně: $a^2 = c \cdot c_a$

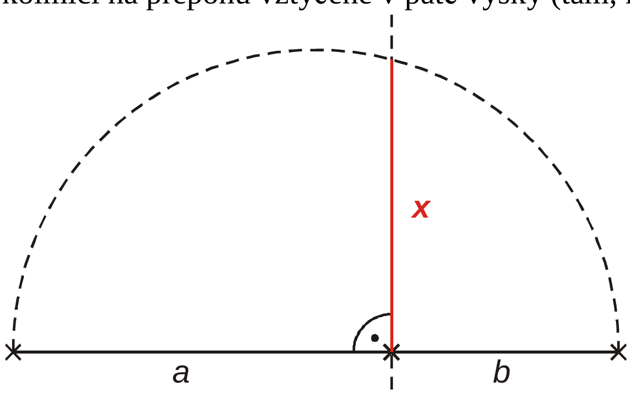
Rýsujeme pravoúhlý trojúhelník, u kterého známe, přeponu $c = 5\text{cm}$ (úsečka o délce *a*) a jeden její úsek $c_a = 3\text{cm}$ (úsečka o délce *b*) $\Rightarrow$ zbývající vrchol leží na Thaletově kružnici a kolmici na přeponu vztyčené v patě výšky (tam, kde je přepona rozdělena na úseky).



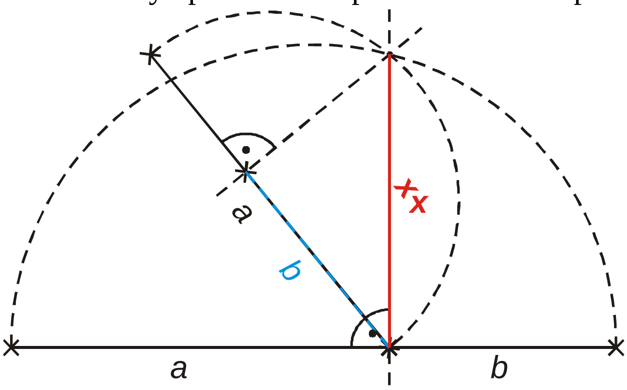
Numerická kontrola: $x^2 = ab = 5 \cdot 3 \Rightarrow x = \sqrt{15} \doteq 3{,}87\text{cm}$

Řešení pomocí Euklidovy věty o výšce: $v^2 = c_a \cdot c_b$

Rýsujeme pravoúhlý trojúhelník, u kterého známe oba úseky přepony, $c_a = 5\text{cm}$ (úsečka o délce *a*) a $c_b = 3\text{cm}$ (úsečka o délce *b*) $\Rightarrow$ zbývající vrchol leží na Thaletově kružnici a kolmici na přeponu vztyčené v patě výšky (tam, kde je přepona rozdělena na úseky).



Oba obrázky opět můžeme položit na sebe a přesvědčit se, že výsledky se rovnají.



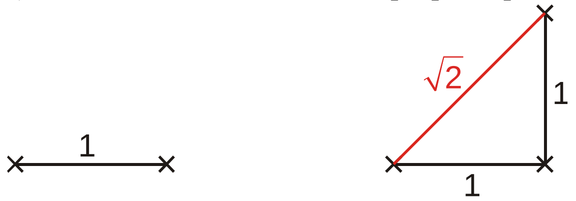
Úsečka o délce $x = \sqrt{ab}$ se nazývá **geometrický průměr úseček** o délkách *a*, *b*.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad by samozřejmě mohl být zadán rovnou vzorcem, ale tím by žáci přišli o asi nejužitečnější část řešení.
Pokud žáci v tomto okamžiku konstrukcím na základě výpočtu rozumí, měli by poté, co se ujasní, že jde o Euklidovy věty, zvládnout rýsování sami.

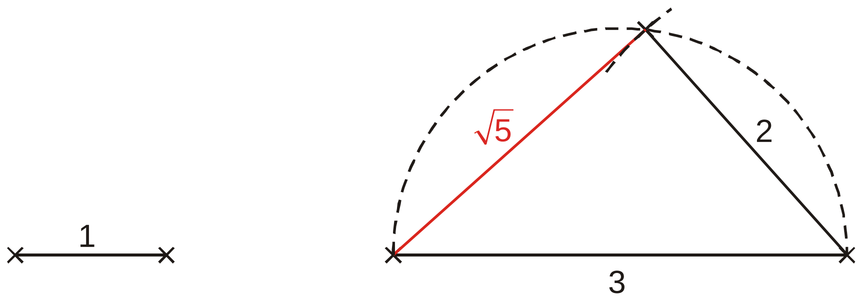
Př. 2: Je dána úsečka o jednotkové délce. Narýsuj co nejjednodušším způsobem úsečky o velikosti: a) $\sqrt{2}$, b) $\sqrt{5}$, c) $\sqrt{6}$, d) $\sqrt{8}$.

Jako jednotkovou zvolíme kvůli snazšímu rýsování vzdálenost $2\,\text{cm}$.

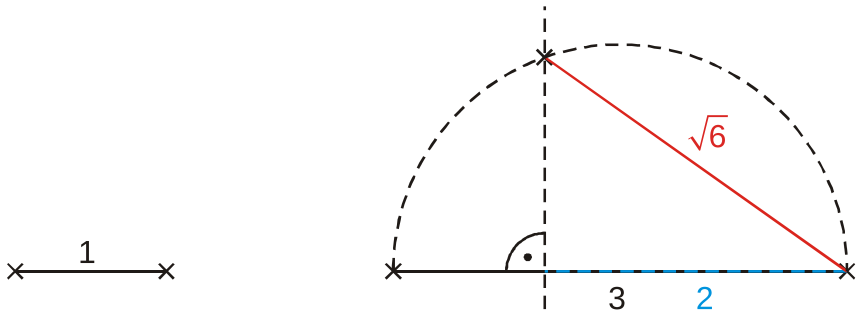
a) $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$ $\Rightarrow$ hledáme přeponu pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami 1 a 1.



b) $\sqrt{5} = \sqrt{9-4} = \sqrt{3^2 - 2^2}$ $\Rightarrow$ hledáme odvěsnu pravoúhlého trojúhelníku s přeponou 3 a odvěsnou 2.



c) $\sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3}$ $\Leftrightarrow$ $\left(\sqrt{6}\right)^2 = 2 \cdot 3$ $\Rightarrow$ hledáme odvěsnu v pravoúhlém trojúhelníku s přeponou 3 a jednou částí přepony 2 (nebo výšku v pravoúhlém trojúhelníku, jehož přepona má části o délkách 3 a 2).

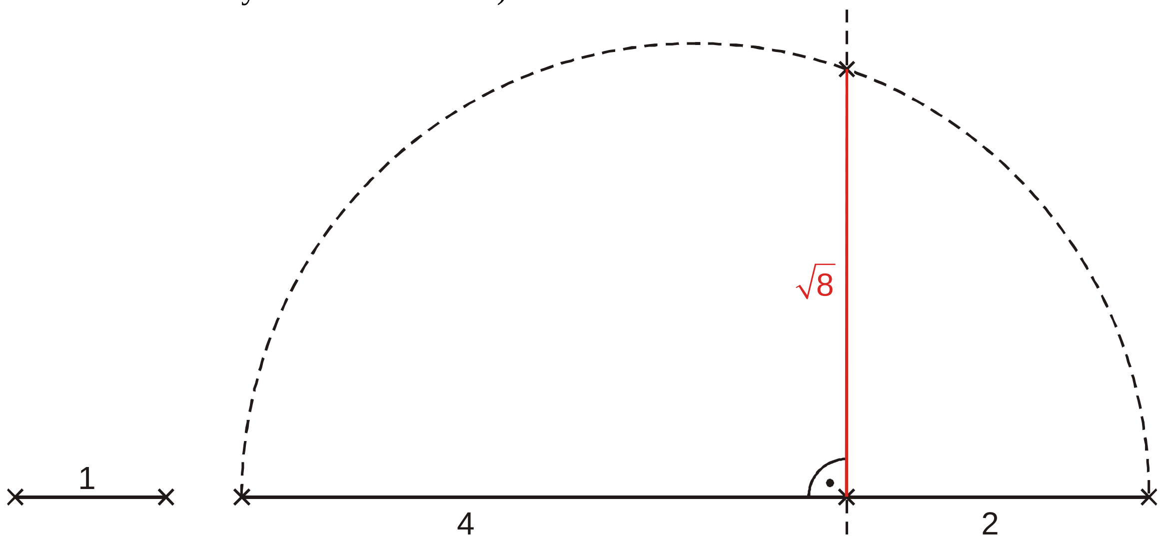


d) $\sqrt{8}$ $\Rightarrow$ více možností

$\sqrt{8}=\sqrt{4+4}=\sqrt{2^2+2^2}$ $\Rightarrow$ hledáme přeponu pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami 2 a 2.

$\sqrt{8}=\sqrt{9-1}=\sqrt{3^2-1^2}$ $\Rightarrow$ hledáme odvěsnu pravoúhlého trojúhelníku s přeponou 3 a odvěsnou 1.

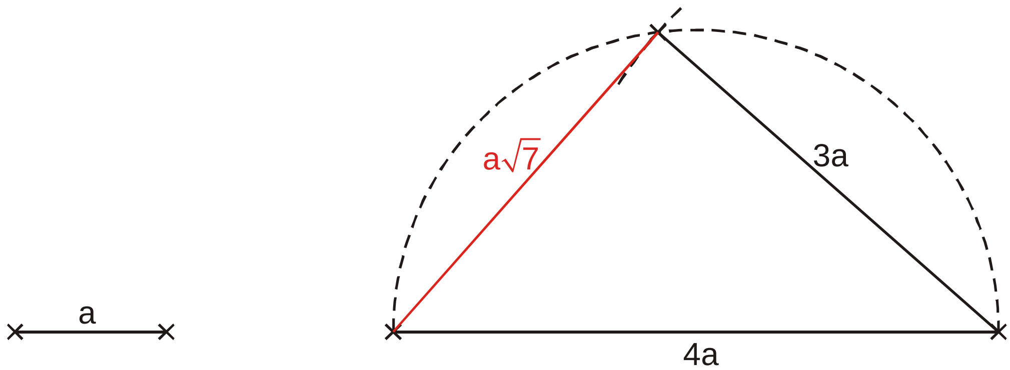
$\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 4}$ $\Leftrightarrow$ $\left(\sqrt{8}\right)^2=2\cdot 4$ $\Rightarrow$ hledáme odvěsnu v pravoúhlém trojúhelníku s přeponou 4 a jednou částí přepony 2 (nebo výšku v pravoúhlém trojúhelníku, jehož přepona má části o délkách 4 a 2 - narýsováno na obrázku).



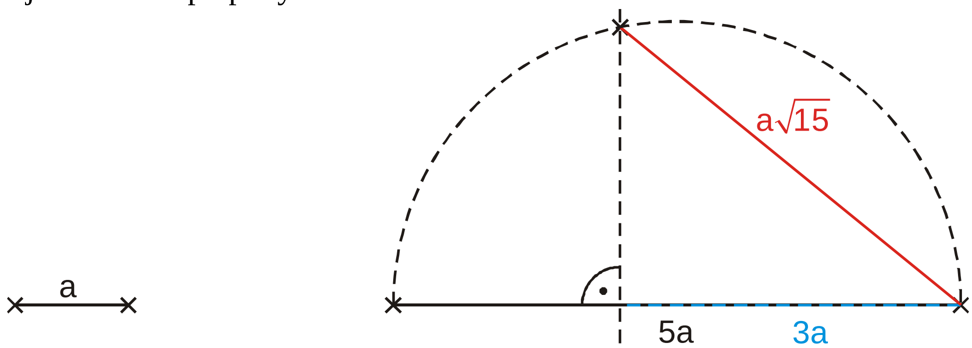
Př. 3: Je dána úsečka o délce a. Sestroj úsečku o délce: a) $a\sqrt{7}$, b) $a\sqrt{15}$.

Stejný postup jako v předchozím příkladu, pouze nevycházíme z úsečky o délce 1, ale z úsečky o délce a.

a) $a\sqrt{7}=a\sqrt{16-9}=a\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{(4a)^2-(3a)^2}$ $\Rightarrow$ hledáme odvěsnu pravoúhlého trojúhelníku s přeponou $4a$ a odvěsnou $3a$.



a) $a\sqrt{15}=\sqrt{a^2 5\cdot 3}=\sqrt{5a\cdot 3a}$ $\Rightarrow$ hledáme odvěsnu v pravoúhlém trojúhelníku s přeponou $5a$ a jednou částí přepony $3a$.



Pedagogická poznámka: Samozřejmě existují i jiné možnosti, jak předchozí příklady řešit.

Př. 4: Jsou dány dvě úsečky o délkách *a*, *b*. Sestroj úsečku *x*, jejíž velikost je dána vztahem $x=\dfrac{a^2+b^2-ab}{a+b}$.

Problém: Výraz je podstatně složitější než vše, co jsme zatím řešili.
Řešení: Některé jeho části jsou povědomé $\Rightarrow$ zkusíme je nahradit délkami nových úseček (které bychom dokázali zkonstruovat) a budeme doufat, že se výraz postupně zjednoduší.
Umíme:

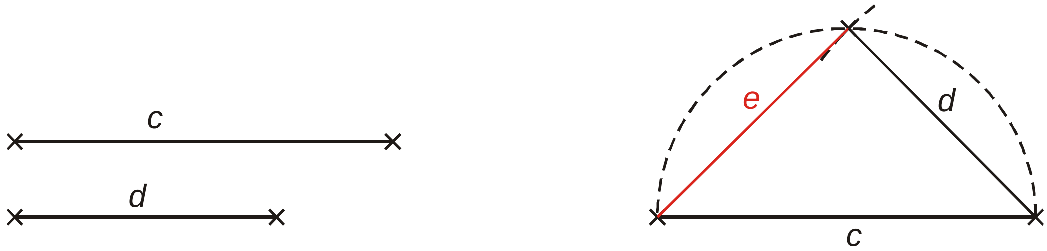
- $c=\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow a^2+b^2=c^2 \Rightarrow x=\dfrac{c^2-ab}{a+b}$,
- $d=\sqrt{ab} \Rightarrow ab=d^2 \Rightarrow x=\dfrac{c^2-d^2}{a+b}$,
- $e=\sqrt{c^2-d^2} \Rightarrow c^2-d^2=e^2 \Rightarrow x=\dfrac{e^2}{a+b}$.
- $x=\dfrac{e^2}{a+b}\ /:e \Rightarrow \dfrac{x}{e}=\dfrac{e}{a+b}$ $\Rightarrow$ podobnost trojúhelníků.

Začneme konstruovat (za délky úseček volíme například $a=4\,\text{cm}$, $b=3\,\text{cm}$).

$c=\sqrt{a^2+b^2}$ $\Rightarrow$ hledáme přeponu v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami *a*, *b*.

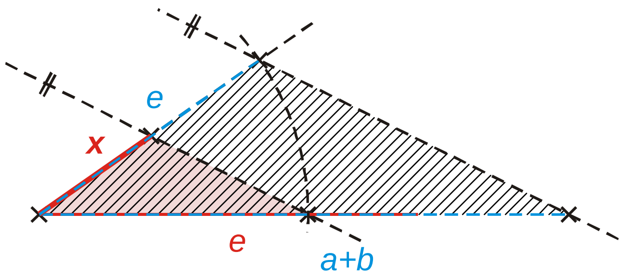
$d=\sqrt{ab}$ $\Rightarrow$ hledáme odvěsnu v pravoúhlém trojúhelníku s přeponou a a jednou částí přepony b.

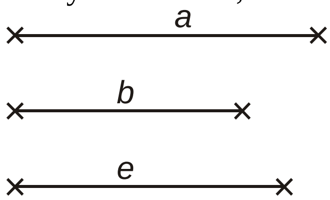
$e=\sqrt{c^2-d^2}$ $\Rightarrow$ hledáme odvěsnu v pravoúhlém trojúhelníku s přeponou c a odvěsnou d.



$\frac{x}{e}=\frac{e}{a+b}$ $\Rightarrow$ dva podobné trojúhelníky.

$\frac{x}{e}=\frac{e}{a+b}$ $\Rightarrow$ úsečky o délkách $e,\ a+b$ tvoří modrý (na obrázku šrafovaný) trojúhelník, jemuž je podobný červený trojúhelník se stranami x, e. Jednu dvojici stran tvoří strany o délkách x, e, druhou strany o délkách $e, a+b$.





Shrnutí: Při konstrukcích můžeme využívat i jiné planimetrické vzorce.